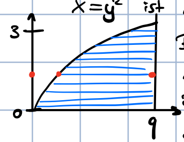
Heute:
- Wiederholung Integralgrenzen tauschen (Fubini)
- Koordinatentransformationen
- Integrieren mit Polarkoordinaten

Aufgabe 4 Serie 7. Wir wollen die Integrationsreihenfolge vertauschen...

Zuerst analysieren wir das gegebene Integral $\int_0^3 \int_{y^2}^{9} y\sin(x^2)\,dx\,dy$.

Bei festem y läuft x von y^2 bis 9. Diese slices summieren wir von 0 bis 3 auf.

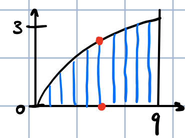


$x=y^2$ ist die Kurve $y=\sqrt{x}$

Bei einem beliebigen festen y • läuft x von der Kurve $x=y^2$ bis $x=9$. Dann summieren wir die blauen slices von $y=0$ bis $y=3$ auf.

Jetzt tauschen wir die Reihenfolge.

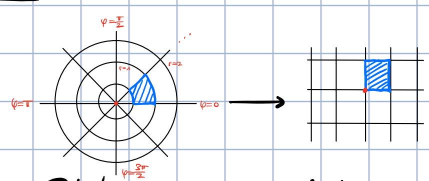
Bei festem x • läuft y von $y=0$ bis $y=\sqrt{x}$. Diese slices summieren wir von $x=0$ bis $x=9$ auf.



$$\Rightarrow \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dy\,dx.$$

Theorie hinter Koordinatentransformation

$$\Phi(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$



Φ bildet den $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ab, aber Polarkoordinaten $\longrightarrow$ Kartesische Koordinaten.

Wir schauen uns lokal an was Φ macht mit einem kleinen Kästchen. Wir zoomen also ganz nah ran... $\rightsquigarrow$ Differential.

Lokal sieht Φ wie eine lineare Abbildung aus. Das ist das Differential von Φ. Wir können das explizit berechnen:

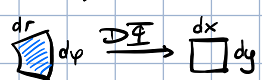
$$D\Phi=\begin{pmatrix} \partial_r\Phi_1 & \partial_\varphi\Phi_1 \\ \partial_r\Phi_2 & \partial_\varphi\Phi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Verändert Φ lokal den Flächeninhalt eines Kästchens? JA!

(Das müsst ihr nicht können...)

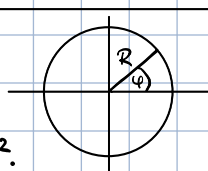
Das entspricht der Determinante: $\det D\Phi = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r$. Φ vergrössert jedes Kästchen um den Faktor r.

Wenn wir Flächeninhalte berechnen wollen (siehe letzte Woche) dann ist also ein kleines Kästchen links ein Kästchen mit Flächeninhalt r grösser. Es gilt also



$$\boxed{r\,dr\,d\varphi = dx\,dy}$$ Transformationsformel.

Flächeninhalt eines Kreises. $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2\}$.

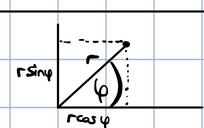


Um den vollen Kreis einmal abzufahren muss r von 0 bis R laufen und φ von 0 bis 2π.

$$A=\iint_K dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^R \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{=dx\,dy}=\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^R d\varphi=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}R^2\,d\varphi=\frac{2\pi}{2}R^2=\pi R^2.$$

Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$



Es gilt: $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2$.

Wir möchten nun eine Funktion auf dem Einheitskreis $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ integrieren.

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi=2\pi\left[\tfrac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1=\pi(e-1).$$

$\longrightarrow$ siehe Prüfung 2024W

16. *6 Punkte*
Gegeben ist das Gebiet im ersten Quadranten, welches durch die Achsen, den Graphen er Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und die Gerade $x = 2$ begrenzt ist.
Dieses Gebiet entspricht der From einer sehr dünnen Platte, deren Höhe vernachlässigbar ist, und deren Dichte gegeben ist durch

$$\rho(x, y) = xy \sin(x^2)$$

a) *2 Punkte*
Stellen Sie Die Masse dieser Platte durch einen geeigneten Integralausdruck dar.

b) *2 Punkte*
Kann der Integralausdruck aus a) durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge auch anders geschrieben werden?
Hinweis: Falls Sie die Teilaufgabe a) nicht gelöst haben, nehmen Sie an, das entsprechende Resultat sei

$$\int_0^1 \int_0^x \rho(x, y)\, dy\, dx$$

b) *2 Punkte*
Bestimmen Sie die Masse dieser Platte.